

**Opracował - Krzysztof Szelażek (wszelkie prawa zastrzeżone)**

**Proszę sprawdzić kompletność istniejących notatek, a następnie rozpocząć przepisywanie właściwych lekcji, których nie ma w zeszycie przedmiotowym, np. z powodu choroby. W przypadku bieżących lekcji należy przeczytać powiązane z nimi treści zawarte w zalecanej literaturze technicznej, np. Władysław Siuta „Mechanika techniczna” lub obejrzeć film dostępny pod wskazanym linkiem, przepisać zamieszczone w dokumencie notatki i spróbować rozwiązać nierozwiązane przykłady lub zamieścić w nich wymagane opisy.**

**Wielkość rysunków należy określić poprzez policzenie kratek.**

## **C/I Wiadomości wstępne**

### **Lekcja 83**

**Temat: Wiadomości ogólne o mechanice.**

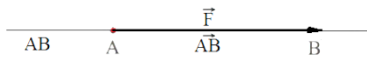
1. Mechanika - nauka zajmująca się ruchami ciał materialnych oraz ich wzajemnym oddziaływaniem mechanicznym.
2. Podział mechaniki:
  - a) relatywistyczna (Einsteina),
  - b) kwantowa (Plancka),
  - c) klasyczna (Newtona).
3. Działy mechaniki klasycznej:
  - a) statyka,
  - b) kinematyka,
  - c) dynamika.
4. Mechanika techniczna - dział mechaniki, który znajduje bezpośrednie zastosowanie w technice.
5. Rodzaje modeli mechanicznych zastępujących rzeczywiste ciała:
  - a) punkt materialny,
  - b) ciało doskonale sztywne,
  - c) ciało sprężyste,
  - d) ciało sprężysto-plastyczne.

### **Lekcja 84**

**Temat: Siły i ich układy oraz moment siły.**

1. Siły
  - a) określenie siły - wielkość fizyczna wektorowa charakteryzująca wzajemne oddziaływanie ciał, w wyniku którego zachodzi zmiana prędkości tych ciał lub ich odkształcenie,
  - b) cechy siły:
    - wartość,
    - kierunek,
    - punkt zaczepienia,
    - zwrot,

c) interpretacja geometryczna siły



gdzie:  $\vec{F}$  - siła,

$F$  - wartość siły w N, która w przyjętej podziałce jest równa długości

wektora  $\overline{AB}$ ,

$AB$  - kierunek działania siły

$A$  - punkt przyłożenia siły,

$B$  - zwrot siły,

d) przyrząd do pomiaru wartości siły - siłomierz.

2. Podział sił:

a) wewnętrzne,

b) zewnętrzne:

- czynne, które starają się wprowadzić ciała w ruch,

- bierne, które przeciwdziałają ruchowi ciał.

3. Układ sił - zbiór sił działających na ciało lub układ ciał traktowanych jako całość.

4. Podział układów sił:

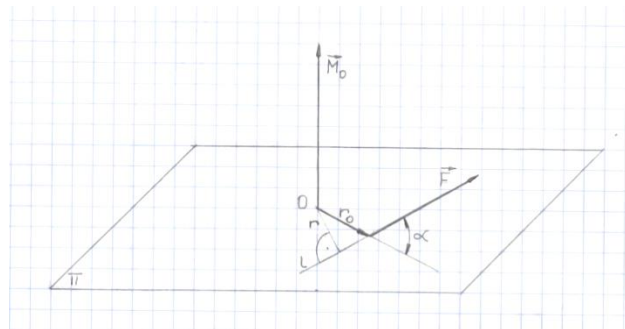
a) płaskie układy sił, czyli takie, których linie działania sił leżą w jednej płaszczyźnie,

b) przestrzenne układy sił, czyli takie, których linie działania sił nie leżą w jednej płaszczyźnie.

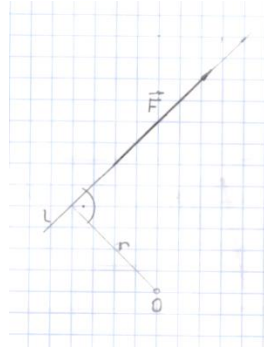
5. Moment siły

a) definicja momentu siły  $\vec{M}$  względem bieguna  $O$  - wielkość fizyczna wektorowa będąca iloczynem wektorowym promienia wodzącego  $\vec{r}_0$  i siły  $\vec{F}$ , czyli

$$M_O = \vec{r}_0 \times \vec{F}$$



b) wartość momentu siły



$$M_O = F \cdot r_o \cdot \sin \alpha$$

$$r = r_o \cdot \sin \alpha \Rightarrow M_O = F \cdot r$$

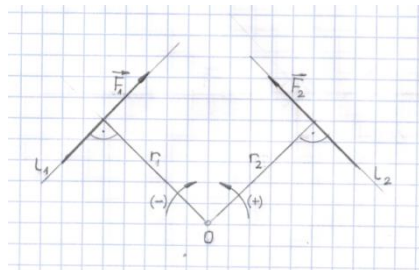
$$M_O = F \cdot r \text{ [Nm]},$$

gdzie:  $F$  - wartość siły w N,

$r$  - ramię siły, czyli odległość jej linii działania od punktu  $O$ , o wartości w m,

c) kierunek i zwrot momentu siły:

- kierunek - jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez biegun i linię działania siły,
- zwrot - przyjmujemy za dodatni, jeżeli siła stara się obrócić ciało, np. belką w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara lub ujemny, gdy obrót następuje w przeciwną stronę, co wymaga poprzedzenia jego wartości umownym znakiem, odpowiednio „+” lub „-”,



d) podstawowe własności momenty siły:

- moment siły nie zmienia się, jeżeli proporcjonalnie zwiększymy wartość siły i zmniejszymy ramię lub odwrotnie,
- moment siły nie zmienia się, jeżeli przesuniemy siłę wzdłuż jej linii działania,
- moment siły względem wszystkich punktów leżących na jej linii działania jest równy zero.

6. Przykłady

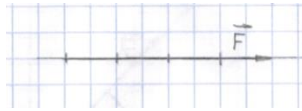
P1) Dana jest siła  $\vec{F}$  o wartości 400 N działającej w kierunku poziomym w prawo. Narysuj wektor tej siły.

**Dane:**  $F = 400 \text{ N}$ ,

**Szukane:**  $F = ?$

kierunek działania siły jest poziomy i zwrot w prawo,

**Rozwiązanie**



**Odp: ...**

P2) Siła  $\vec{F}$  o wartości 100 N działa na koniec belki utwierdzonej w murze w kierunku prostopadłym do jej osi. Oblicz wartość momentu tej siły względem miejsca utwierdzenia belki, czyli punktu U, jeżeli jej długość wynosi 5 m.



**Dane:**  $F = 100 \text{ N}$ ,

kierunek działania siły jest prostopadły do osi belki,  
 $l = 5 \text{ m}$ ,

**Szukane:**  $M_U = ?$

**Rozwiązanie**

$M_U = \dots$

**Odp: ...**

## C/II Statyka

### Lekcja 85

**Temat: Wiadomości ogólne o statyce.**

1. Statyka - poddział mechaniki zajmujący się badaniem równowagi ciał materialnych poddanych działaniu sił oraz określaniem warunków, jakie muszą być spełnione, aby ciała te pozostawały w spoczynku.
2. Zasady dynamiki Newtona:
  - a) pierwsza  
Jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub działające siły równoważą, czyli ich siła wypadkowa ma wartość równą zero, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
  - b) druga  
Jeżeli siły działające na ciało nie równoważą, czyli ich siła wypadkowa ma wartość różną od zera, to ciało porusza się ruchem jednostajnie zmiennym z przyspieszeniem, którego wartość jest wprost proporcjonalna do wartości siły wypadkowej.
  - c) trzecia  
Oddziaływania ciał są zawsze wzajemne, przy czym siły wzajemnego oddziaływania

ciał mają ten sam kierunek, równe wartości i przeciwne zwroty, ale różne punkty przyłożenia i dlatego nie równoważą się tzn. każda działa na inne ciało.

2. Uwaga - statyka opiera się na pewnych zasadach wynikających z doświadczenia i przyjmowanych bez dowodzenia jako aksjomaty.

3. Przykłady

P1) Są cztery zasady statyki. Korzystając z internetu podaj treść dwóch pierwszych.

Zasada 1

Dwie siły przyłożone do ciała sztywnego działające wzdłuż jednej prostej, mające równe wartości i przeciwne zwroty równoważą się wzajemnie.

Zasada 2

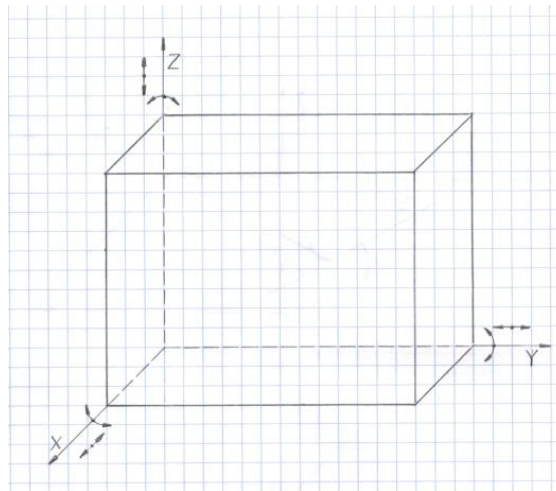
Działanie układu sił przyłożonych do ciała sztywnego nie ulegnie zmianie, jeżeli układ ten zwiększymy lub zmniejszymy o dwie równoważące się siły.

Odp: ...

## Lekcja 86

**Temat: Stopnie swobody oraz więzy i ich reakcje.**

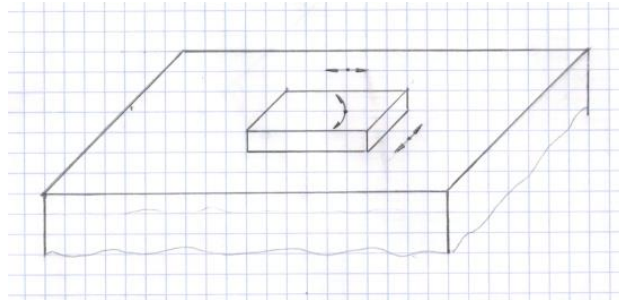
1. Ciało swobodne - ciało, które może poruszać się dowolnie w przestrzeni.
2. Stopnie swobody ciała swobodnego:
  - a) rodzaje stopni swobody



- b) liczba stopni swobody - 6.
3. Więzy i ich reakcje
    - a) określenie więzów - elementy ograniczające ruchy ciała, np.: więzami dla wału korbowego silnika są łożyska, a dla wagonu szyny,
    - b) reakcja więzów - siły, z jakimi więzy oddziałują na ciała, czego skutkiem jest odebranie im określonej liczby stopni swobody.
  4. Przykłady więzów, czyli podparć i zamocowań - gładka powierzchnia, podpora przesuwna, ciągnio, podpora stała, powierzchnia stopniowa itp.

## 5. Przykłady

P1) Na gładkiej powierzchni płyty pomiarowej położono płytkę wzorcową. Określ liczbę stopni swobody tej płytki.



**Dane:** układ ciał

**Szukane:**  $n = ?$

**Rozwiązanie**

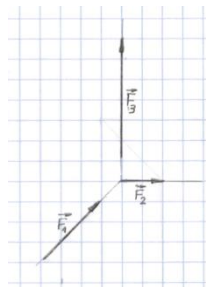
$n = \dots$

**Odp:**

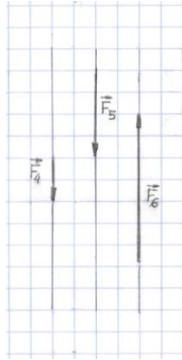
**Lekcja 87/88**

**Temat:** **Płaskie układy sił i ich równowaga.**

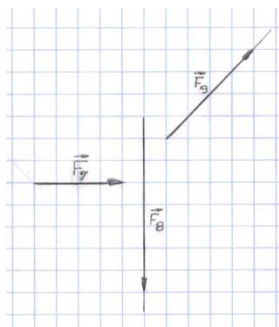
1. Płaski układ sił - układ sił, których linie działania sił leżą w jednej płaszczyźnie.
2. Rodzaje płaskich układów sił:
  - a) zbieżny układ sił, czyli taki układ sił, który linie działania leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie,



- b) równoległy układ sił, czyli taki układ sił, który linie działania leżą w jednej płaszczyźnie i są do siebie równoległe,

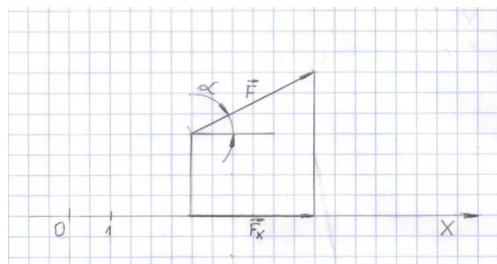


- c) dowolny układ sił, czyli taki układ sił, który linie działania leżą w jednej płaszczyźnie i mają różne kierunki.



### 3. Rzut siły na oś

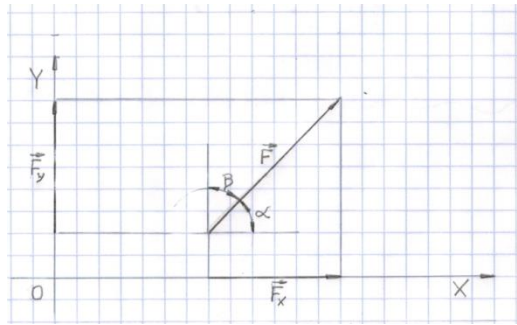
- określenie rzutu siły  $\vec{F}$  na oś OX - rzut prostokątny wektora tej siły na tę oś, który oznaczamy symbolem  $\vec{F}_x$ ,
- wartość rzutu siły  $\vec{F}$ :
  - na oś OX



$$\underline{F_x = F \cdot \cos \alpha \text{ [N]}}$$

gdzie: F - wartość siły w N,

$\alpha$  - kąt, jaki tworzy linia działania siły z osią OX, o wartości (mierze) w  $^\circ$ ,  
 - na osie OX i OY



$$F_y = F \cdot \cos \beta$$

$$(\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha) \Rightarrow F_y = F \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = F \cdot \sin \alpha$$

$$\underline{F_x = F \cdot \cos \alpha \text{ [N]},}$$

$$\underline{F_y = F \cdot \sin \alpha \text{ [N]},}$$

gdzie:  $F$ ,  $\alpha$  - jak wyżej,

$\beta$  - kąt, jaki tworzy linia działania siły z osią  $OY$ , o wartości (mierze) w  $^\circ$ ,

- c) szczególne przypadki położenia sił względem osi i odpowiadające im wartości:
- jeżeli siła jest prostopadła do osi, to niezależnie od jej zwrotu, wartość rzutu siły tę oś jest zawsze równa zero,
  - jeżeli siła jest równoległa do osi, to wartość rzutu siły tę oś jest zawsze równa wartości siły, przy czym należy ją poprzedzić znakiem „+”, jeżeli zwroty osi i siły są zgodne lub znakiem „-”, jeżeli zwroty te są przeciwne.

#### 4. Równowaga dowolnego płaskiego układu sił

- a) określenie równowagi płaskiego dowolnego układu sił - stan, w którym ciała lub układy ciał pod wpływem działających na nie sił pozostają nieruchome,
- b) twierdzenia podstawowe wykorzystywane podczas określania równowagi płaskiego układu sił:

- twierdzenie o sile wypadkowej

Siła wypadkowa płaskiego dowolnego układu sił jest równa sumie geometrycznej sił tego układu, co zapisujemy  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix}$ .

- twierdzenie o momencie wypadkowym, inaczej głównym

Moment wypadkowy płaskiego układu sił względem przyjętego bieguna, np. punktu  $O$  jest równy sumie algebraicznej momentów poszczególnych sił tego układu

obliczonych względem tego samego bieguna, co zapisujemy  $M = \sum_{i=1}^n M_{iO}$ .

- c) warunki równowagi płaskiego układu sił:

- wykreślne:

- wielobok sił musi być zamknięty,
- wielobok sznurowy musi być zamknięty,

- analityczne:

- suma algebraiczna rzutów wszystkich sił na oś  $OX$  musi być równa zero, co



zapisujemy  $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ ,

- suma algebraiczna rzutów wszystkich sił na oś OY musi być równa zero, co

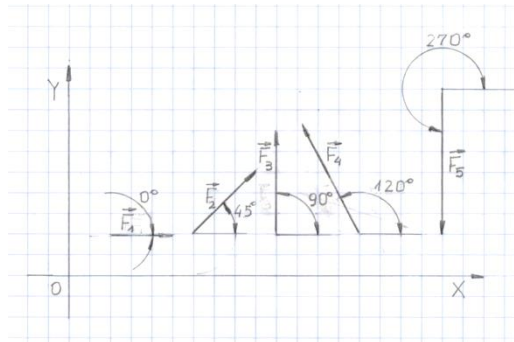
zapisujemy  $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ ,

- suma algebraiczna momentów wszystkich sił względów dowolne bieguna, czyli

punktu, np. O musi być równa zero, co zapisujemy  $\sum_{i=1}^n M_{iO} = 0$ .

## 5. Przykłady

P1) Dana jest siła  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  i  $\vec{F}_5$ , odpowiednio o wartościach 150 N, 200N, 250 N, 300 N i 350 N. Oblicz wartości rzutów tych sił na osi układu współrzędnych prostokątnych OXY.



**Dane:**  $F_1 = 150 \text{ N}$ ,  
 $F_2 = 200 \text{ N}$ ,  
 $F_3 = 250 \text{ N}$ ,  
 $F_4 = 300 \text{ N}$ ,  
 $F_5 = 350 \text{ N}$ ,

**Szukane:**  $F_{ix} = ?$   
 $F_{iy} = ?$

### Rozwiązanie

$$k_F = 100 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$F_{1x} = 150 \text{ N} \cdot \cos 0^\circ = 150 \text{ N} \cdot 1 = 150 \text{ N}$$

$$F_{1y} = 150 \text{ N} \cdot \sin 0^\circ = 150 \text{ N} \cdot 0 = 0 \text{ N}$$

$$F_{2x} = 200 \text{ N} \cdot \cos 45^\circ = 200 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2} \text{ N}$$

$$F_{2y} = 200 \text{ N} \cdot \sin 45^\circ = 200 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2} \text{ N}$$

$$F_{3x} =$$

$$F_{3y} =$$

$$F_{4x} =$$

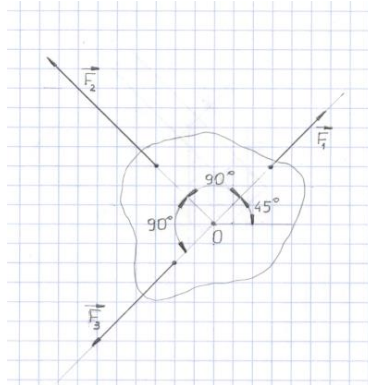
$$F_{4y} =$$

$$F_{5x} =$$

$$F_{5y} =$$

**Odp: ...**

P2) Na pewne ciało działają siły  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , i  $\vec{F}_3$  odpowiednio o wartościach 200 N, 400 N i 300 N. Wyznacz metodą wykreślą wypadkową tego układu sił.



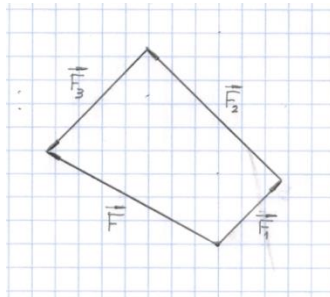
**Dane:**  $F_1 = 300 \text{ N}$ ,

$F_2 = 150 \text{ N}$ ,

$F_3 = 200 \text{ N}$ ,

**Szukane:**  $F = ?$

**Rozwiązanie**



$$k_F = 100 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

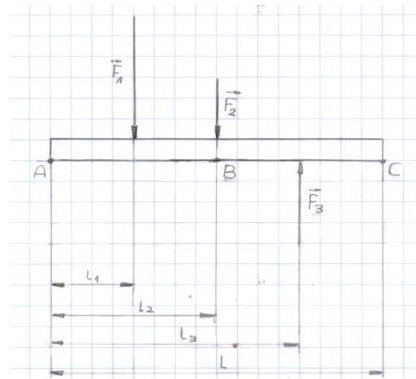
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$F = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 42 \text{ mm} = 420 \text{ N}$$

**Odp: ...**

P3) Na belkę o długości równej 4 m działają siły  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , i  $\vec{F}_3$  odpowiednio o wartościach 300 N, 150 N i 200 N, których linie działania przebiegają w odległości odpowiednio 1 m, 2 m i 3 m od lewego jej końca. Oblicz moment główny tego układu sił względem

biegunów A, B i C.



**Dane:**  $F_1 = 300 \text{ N}$ ,  
 $F_2 = 150 \text{ N}$ ,  
 $F_3 = 200 \text{ N}$ ,  
 $l_1 = 1 \text{ m}$ ,  
 $l_2 = 2 \text{ m}$ ,  
 $l_3 = 3 \text{ m}$ ,

**Szukane:**  $M_A = ?$   
 $M_B = ?$   
 $M_C = ?$

### Rozwiązanie

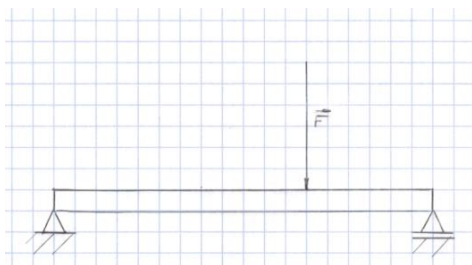
$$M_A = \sum_{i=1}^n M_{iA} = -F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3 = -300 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} - 150 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + 200 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} = 0 \text{ Nm}$$

$$M_B = \dots$$

$$M_C = \dots$$

**Odp: ...**

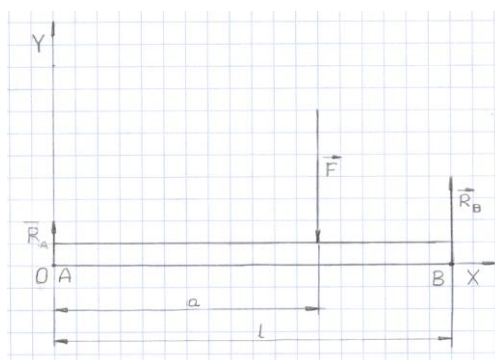
P4) Pozioma belka o długości równej 3 m podparta została na podporze stałej i ruchomej obciążona została pionowo działającą siłą  $\vec{F}$  o wartości wynoszącej 300 N, której linia działania przebiega w odległości 2 m od podpory stałej. Wyznacz metodą analityczną reakcje podpór.



**Dane:**  $F = 300 \text{ N}$ ,  
 $a = 2 \text{ m}$ ,  
 $l = 3 \text{ m}$ ,

**Szukane:**  $R_A = ?$   
 $R_B = ?$

## Rozwiązanie



$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0\text{N} + 0\text{N} + 0\text{N} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = R_A - F + R_B = 0 \Rightarrow R_A + R_B = F$$

$R_A = F - R_B$  (pierwsze równanie, którego nie można rozwiązać, bo zawiera 2 niewiadome)

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = R_A \cdot 0\text{m} - F \cdot a + R_B \cdot l = 0 \Rightarrow R_B \cdot l = F \cdot a / : l$$

$$R_B = \frac{F \cdot a}{l} \text{ (drugie równanie potrzebne do utworzenia układu równań)}$$

$$\begin{cases} R_A = F - R_B \\ R_B = \frac{F \cdot a}{l} \end{cases}$$

(obliczam wartość reakcji  $R_B$  z drugiego równania, a następnie wartość reakcji  $R_A$  z pierwszego)

$$R_B = \frac{300\text{N} \cdot 2\text{m}}{3\text{m}} = 200\text{N}$$

$$R_A = 300\text{N} - 200\text{N} = 100\text{N}$$

**Odp: ...**

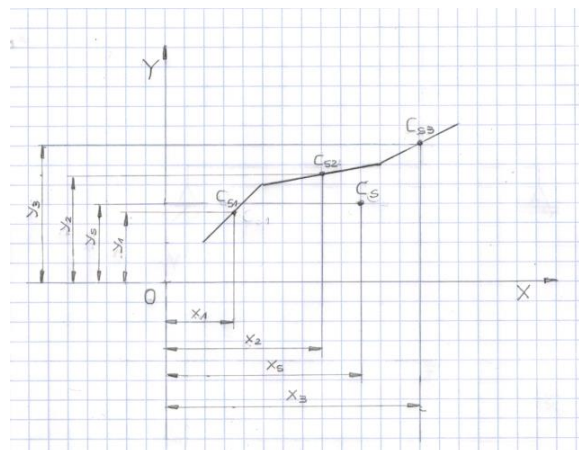
## Lekcja 89

**Temat: Środek ciężkości i jego położenie.**

### 1. Środek ciężkości ciała

- określenie środka ciężkości - punkt, w którym zaczepiona jest siła przedstawia ciężar danego ciała, będący jednocześnie środkiem sił równoległych reprezentujących elementarne siły ciężkości,
- rodzaje równowagi ciał:

- stała, która występuje wtedy, gdy środek ciężkości ciała znajduje się poniżej punktu podparcia,
  - chwiejna, która występuje wtedy, gdy środek ciężkości ciała znajduje się powyżej punktu podparcia,
  - obojętna, która występuje wtedy, gdy środek ciężkości ciała i punkt podparcia pokrywają się,
- c) twierdzenia wykorzystywane przy wyznaczaniu środków ciężkości ciał, które traktujemy jako jednorodne:
- jeżeli ciało ma jedną oś symetrii, to jego środek ciężkości leży na tej osi,
  - jeżeli ciało ma dwie osie symetrii, to jego środek ciężkości leży na przecięciu się tych osi,
  - jeżeli ciało ma środek symetrii, to punkt ten jest jednocześnie jego środkiem ciężkości,
  - środek ciężkości cała złożonego z kilku ciał pokrywa się ze środkiem ciężkości punktów materialnych leżących w środkach ciężkości tych ciał,
2. Środek ciężkości linii
- a) określenie linii - ciało sztywne, w którym dwa wymiary są bardzo małe w porównaniu do trzeciego, czyli długości,
  - b) wyznaczanie środka ciężkości linii łamanej



$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n l_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n l_i},$$

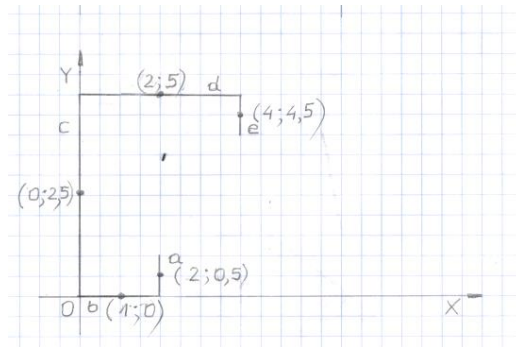
$$\Rightarrow C_s = (x_s, y_s)$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^n l_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n l_i}.$$

### 3. Przykłady

P1) Linia łamana jednorodna składa się z pięciu odcinków o długościach  $a = 1$  cm,

$b = 3 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ,  $d = 4 \text{ cm}$ ,  $e = 2 \text{ cm}$ . Oblicz współrzędne środka ciężkości tej linii.



**Dane:**  $a = 1 \text{ cm}$ ,

$b = 2 \text{ cm}$ ,

$c = 5 \text{ cm}$ ,

$d = 4 \text{ cm}$ ,

$e = 1 \text{ cm}$ ,

**Szukane:**  $x_s = ?$

$y_s = ?$

### Rozwiązanie

Dostosowujemy ogólnie wzory do oznaczeń występujących w treści przykładu.

$$x_s = \frac{a \cdot x_a + b \cdot x_b + c \cdot x_c + d \cdot x_d + e \cdot x_e}{a + b + c + d + e} =$$

$$= \frac{1\text{cm} \cdot 2\text{cm} + 2\text{cm} \cdot 1\text{cm} + 5\text{cm} \cdot 0\text{cm} + 4\text{cm} \cdot 2\text{cm} + 1\text{cm} \cdot 4\text{cm}}{1\text{cm} + 3\text{cm} + 5\text{cm} + 4\text{cm} + 2\text{cm}} =$$

$$= \frac{16\text{cm}^2}{13\text{cm}} \approx 1,23\text{cm}$$

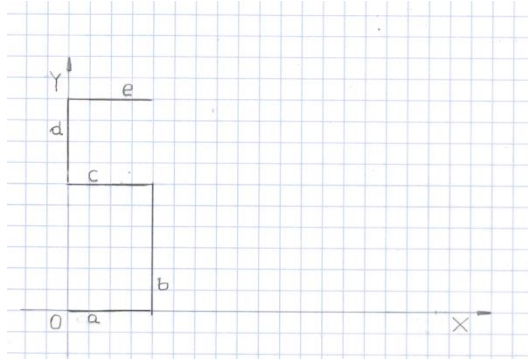
$$y_s = \frac{a \cdot y_a + b \cdot y_b + c \cdot y_c + d \cdot y_d + e \cdot y_e}{a + b + c + d + e} =$$

$$= \frac{1\text{cm} \cdot 0,5\text{cm} + 2\text{cm} \cdot 0\text{cm} + 5\text{cm} \cdot 2,5\text{cm} + 4\text{cm} \cdot 5\text{cm} + 1\text{cm} \cdot 4,5\text{cm}}{1\text{cm} + 3\text{cm} + 5\text{cm} + 4\text{cm} + 2\text{cm}} =$$

$$= \frac{37,7\text{cm}^2}{13\text{cm}} \approx 2,88\text{cm}$$

**Odp: ...**

P2) Linia łamana jednorodna składa się z pięciu odcinków o długościach  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $c = 2 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $e = 2 \text{ cm}$ . Oblicz współrzędne środka ciężkości tej linii.



**Dane:**  $a = 2 \text{ cm}$ ,  
 $b = 3 \text{ cm}$ ,  
 $c = 2 \text{ cm}$ ,  
 $d = 2 \text{ cm}$ ,  
 $e = 2 \text{ cm}$ ,

**Szukane:**  $x_s = ?$   
 $y_s = ?$

**Rozwiązanie**

rozwiązanie - zostawić  $\frac{1}{2}$  strony wolnej

**Odp: ...**

**Lekcja 90**

**Temat: Podsumowanie przerobionego materiału - statyka.**